1 Princip matematičke indukcije

1.1 Teorijski deo

Princip matematičke indukcije se sastoji u sledećem:

Neka je $P(n)$ iskaz koji se odnosi na prirodan broj n. Tada je on tačan za sve prirodne brojeve ako su ispunjeni uslovi:

(1) $P(1)$ je tačan iskaz;

(2) $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ je tačan iskaz za sve $n \in \mathbb{N}$.

Uobičajeno je da se formula $P(1)$ naziva *osnova (baza) indukcije*, a implikacija $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ *indukcijski korak,* dok se formula $P(n)$ naziva *indukcijska hipoteza.*

Intuitivno, ako je tačno $P(1)$, onda, s obzirom da je implikacija $P(1) \Rightarrow P(2)$ tačna, tačno je i $P(2)$. Dalje, iz tačnosti implikacije $P(2) \Rightarrow P(3)$ sledi da je tačno $P(3)$ itd.

Još jedan oblik matematičke indukcije je *transfinitna indukcija.* Iskaz $P(n)$ je tačan za sve prirodne brojeve ako su ispunjeni uslovi:

(1) $P(1)$ je tačan iskaz;

(2) za sve $n \in \mathbb{N}$, ako su $P(1), P(2), \ldots, P(n)$ tačni iskazi, onda je i $P(n+1)$ tačan iskaz.

1.2 Zadaci

1. Dokazati da za sve prirodne brojeve n važe sledeće jednakosti:

   a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

   b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$;

   c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} = \frac{(2n+2)!!}{(2n+1)!!} - 2$;

   Napomena: $(2n)!! = (2n) \cdot (2n-2) \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 2$
   $(2n+1)!! = (2n+1) \cdot (2n-1) \cdot \ldots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1$

   d) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{2}{3} \frac{n^2+n+1}{n(n+1)}$.

2. Dokazati da za sve prirodne brojeve n važe sledeće nejednakosti:

   a) $\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$;

   b) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n} \geq \dfrac{1}{2}$.

3. Dokazati da za sve prirodne brojeve n važi:

   a) $7 \mid 2^{n+1} + 3^{2n-1}$;

   b) $3 \mid 5^n + 2^{n+1}$

4. *Fibonačijevi brojevi* su zadati na sledeći način

   $$f_1 = f_2 = 1, \qquad f_{n+2} = f_n + f_{n+1}, \ \ n \geq 1.$$

   Dokazati da za Fibonačijeve brojeve važi:

   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k^2 = f_n \cdot f_{n+1}$; *b)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k = f_{n+2} - 1$; *c)* $f_n \geq \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-2}$.

5. Ako je $a_1 = 3, a_2 = 5$ i $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}, n \geq 2$, dokazati da je $a_n = 2^n + 1, n \geq 1$.